RACCOLTA DI ESERCIZI PER I CORSI PRELIMINARI

II PARTE: FUNZIONI ELEMENTARI E GEOMETRIA ANALITICA

FUNZIONI

Tracciare per punti i grafici delle seguenti funzioni

1. $f(x) = 3x - 1$ **2.** $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ **3.** $f(x) = 7 - 2x$ **4.** $f(x) = \frac{7}{4} - \frac{3}{2}x$

5. $f(x) = \frac{2x}{3} - \frac{5}{6}$ **6.** $f(x) = 2x^2 - 4$ **7.** $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}$ **8.** $f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$

9. $f(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + 1$ **10.** $f(x) = \frac{12}{x}$ **11.** $f(x) = \frac{24}{2x+1}$ **12.** $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

13. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x+2}$ **14.** $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x+2}$ **15.** $f(x) = \frac{x^3}{8} - 1$ **16.** $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x - 2$

17. $f(x) = \sqrt{3x+1}$ **18.** $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$ **19.** $f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$ **20.** $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

Determinare il dominio delle seguenti funzioni

21. $f(x) = 5x - 6$ $\{R.$ tutto $\mathbb{R}\}$ **22.** $f(x) = x^2 + 8$ $\{R.$ tutto $\mathbb{R}\}$

23. $f(x) = \frac{2}{x^2}$ $\{R.\ \mathbb{R} - \{0\}\}$ **24.** $f(x) = \frac{2}{x^2 + 2}$ $\{R.$ tutto $\mathbb{R}\}$

25. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ $\{R.\ \mathbb{R} - \{2\}\}$ **26.** $f(x) = \frac{2}{x^3 - 2x^2 + x}$ $\{R.\ \mathbb{R} - \{0\,,\,1\}\}$

27. $f(x) = \sqrt{3x-2}$ $\{R.\ \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)\}$ **28.** $f(x) = \frac{\sqrt{5x+7}}{x}$ $\{R.\ \left[-\frac{7}{5}, 0\right) \cup (0\,,+\infty)\}$

29. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2}$ $\{R.\ \left(-\infty\,, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\,, +\infty\right)\}$

30. $f(x) = \frac{\sqrt{5x-7}}{x}$ $\{R.\ \left[\frac{7}{5}, +\infty\right)\}$ **31.** $f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 2}$ $\{R.$ tutto $\mathbb{R}\}$

32. $f(x) = \frac{5x+11}{2x-3}$ $\{R.\ \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}\}$ **33.** $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ $\{R.$ tutto $\mathbb{R}\}$

34. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7}$ $\{R.$ tutto $\mathbb{R}\}$

35. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - 7x + 10}}$ $\{R.\ \mathbb{R} - \left\{\frac{-1-\sqrt{41}}{2}, 2, \frac{-1+\sqrt{41}}{2}\right\}\}$

Aiutandosi con il grafico, determinare il codominio delle seguenti funzioni

36. $f(x) = \frac{x}{2} + 2$ $\{R.$ tutto $\mathbb{R}\}$ **37.** $f(x) = x^2 + 4$ $\{R.\ [4\,,+\infty)\}$

38. $f(x) = x^2 + 2x + 2$ $\{R.\ [1\,,+\infty)\}$ **39.** $f(x) = 5 - x^2$ $\{R.\ (-\infty\,,5]\}$

40. $f(x) = x^3 + x$ $\{R.$ tutto $\mathbb{R}\}$ **41.** $f(x) = 7 - \frac{x^3}{2}$ $\{R.$ tutto $\mathbb{R}\}$

42. $f(x)=\sqrt{12-5x}$ $\{R.\ [0\ ,+\infty)\}$

43. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ $\{R.\ [0\ ,+\infty)\}$

44. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-8}$ $\{R.\ [-2\ ,+\infty)\}$

45. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x-2}$ $\{R.$ tutto $\mathbb{R}\}$

46. $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$ $\{R.\ \mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\}$

47. $f(x)=\dfrac{5x+3}{3-2x}$ $\{R.\ \mathbb{R}-\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}\}$

Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive, suriettive, biettive
NOTA: nelle risposte si è tenuto conto della definizione "rigorosa" di biettività, per la quale una funzione è biettiva solo se è iniettiva e suriettiva; in molti casi (ad esempio nelle applicazioni di Analisi Matematica), si tende ad identificare l'immagine con il codominio, col risultato che la sola iniettività è sufficiente per considerare una funzione invertibile.

48. $f(x) = 5x - 6$ {*R. sì; sì; sì*}

49. $f(x) = 2x^2 + 3$ {*R. no; no; no*}

50. $f(x) = x^3 + x$ {*R. sì; sì; sì*}

51. $f(x) = x^3 - x$ {*R. no; sì; no*}

52. $f(x)=\sqrt{3x+8}$ {*R. sì; no; no*}

53. $f(x)=\sqrt[3]{3x+8}$ {*R. sì; sì; sì*}

54. $f(x)=\dfrac{x+1}{7-2x}$ {*R. sì; no; no*}

55. $f(x) = x^4 + 1$ {*R. no; no; no*}

56. $f(x) = x^9 + x^7$ {*R. sì; sì; sì*}

Scrivere le inverse delle seguenti funzioni
NOTA: utilizzando la classica convenzione, occorre risolvere l'equazione y = f(x) rispetto ad x, quindi scambiare x con y; si ottiene in tal modo la funzione inversa scritta nella forma y= g(x).

57. $f(x) = 8x - 11$ $\{R.\ g(x)=\dfrac{x+11}{8}$, per $x\in\mathbb{R}\}$

58. $f(x)=\dfrac{x}{15}+\dfrac{2}{13}$ $\{R.\ g(x)=\dfrac{15}{13}(13x-2)$, per $x\in\mathbb{R}\}$

59. $f(x)=\dfrac{x}{x+3}+2$ $\{R.\ g(x)=\dfrac{3(2-x)}{x-3}$, per $x\neq 3\}$

60. $f(x)=\dfrac{2x+\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-1}$ $\{R.\ g(x)=\dfrac{x+\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-2}$, per $x\neq\dfrac{2}{\sqrt{3}}\}$

61. $f(x) = 8x^3 + 24$ $\{R.\ g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-24}}{2}$, per $x\in\mathbb{R}\}$

62. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3x-5}{2x+5}}$ $\{R.\ g(x)=\dfrac{5(x^3+1)}{3-2x^3}$, per $x\neq\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\}$

63. $f(x)=\sqrt[3]{512-x^9}$ $\{R.\ g(x)=\sqrt[9]{512-x^3}$, per $x\in\mathbb{R}\}$

64. $f(x)=\dfrac{7x^5+93}{224x^5-81}$ $\{R.\ g(x)=\sqrt[5]{\dfrac{3(27x+31)}{7(32x-1)}}$, per $x\neq\dfrac{1}{32}\}$

65. $f(x)=\sqrt{2x-3}$ $\{R.\ g(x)=\dfrac{x^2+3}{2}$, per $x\geq 0\}$

66. $f(x)=\sqrt[4]{5x+8}+2$ $\{R.\ g(x)=\dfrac{x^4-8x^3+24x^2-32x+8}{5}$, per $x\geq 2\}$

Per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni f e g, scrivere le funzioni composte f(g(x)) e g(f(x))

67. $f(x) = 2x - 15$ $g(x) = x^2$ $\{R.\ 2x^2 - 15$, per $x\in\mathbb{R}$; $(2x-15)^2$, per $x\in\mathbb{R}\}$

68. $f(x) = 3x + 1$ $g(x)=\dfrac{1}{5x}$ $\{R.\ \dfrac{1}{5x}+1$, per $x\neq 0$; $\dfrac{1}{5(3x+1)}$, per $x\neq-\dfrac{1}{3}\}$

69. $f(x)=\dfrac{2}{2+x}$ $\qquad g(x)=x^2+2$ $\qquad \{R.\ \dfrac{2}{x^2+4}$, per $x\in\mathbb{R}$; $\dfrac{2(x^2+4x+5)}{(x+2)^2}$, per $x\neq -2\}$

70. $f(x)=x+\sqrt{x}+1$ $\qquad g(x)=x^2-1$

$\{R.\ x^2+\sqrt{x^2-1}$, per $x\leq -1 \vee x\geq 1$; $x^2+3x+2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$, per $x\geq 0\}$

71. $f(x)=\sqrt{x}+1$ $\qquad g(x)=\sqrt{x}-1$ $\qquad \{R.\ \sqrt{\sqrt{x}-1}+1$, per $x\geq 1$; $\sqrt{\sqrt{x}+1}-1$, per $x\geq 0\}$

72. $f(x)=\dfrac{3x+2}{5x-2}$ $\qquad g(x)=\dfrac{x+4}{3x-4}$

$\{R.\ \dfrac{9x-4}{11x+12}$, per $x\notin\{-\dfrac{11}{12}, \dfrac{4}{3}\}$; $\dfrac{23x-6}{14-11x}$, per $x\notin\{\dfrac{2}{5}, \dfrac{14}{11}\}\}$

73. $f(x)=\sqrt{x+1}+x$ $\qquad g(x)=\sqrt[3]{x}-1$ $\qquad \{R.\ \sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}-1$, per $x\geq 0$; $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}+x}-1$, per $x\geq -1\}$

PUNTI E RETTE

Scrivere le coordinate del punto medio del segmento AB nei seguenti casi

74. $A\ (2\ ;-4)$ $\qquad B\ (-6\ ;10)$ $\qquad \{R.\ (-2\ ;3)\}$

75. $A\ (5\ ;4)$ $\qquad B\ (8\ ;-8)$ $\qquad \{R.\ \left(\dfrac{13}{2};-2\right)\}$

76. $A\left(2+\sqrt{3};-7\right)$ $\qquad B\left(5-\sqrt{3};7+\sqrt{3}\right)$ $\qquad \{R.\ \left(\dfrac{7}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\}$

77. $A\left(\dfrac{5+\sqrt{3}}{6};\dfrac{1-\sqrt{3}}{3}\right)$ $\qquad B\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}};\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}\right)$ $\qquad \{R.\ \left(\dfrac{5+11\sqrt{3}}{12};\dfrac{1}{3}\right)\}$

Per ciascuna delle seguenti terne di rette, individuare le due che sono tra di loro parallele

78. r: $y=5x+3$ $\qquad s$: $y=3-5x$ $\qquad t$: $y=12+5x$ $\qquad \{R.\ r$ e $t\}$

79. $r: y=\dfrac{2}{3}x-1$ $\qquad s: y=1-\dfrac{2}{3}x$ $\qquad t: y=-\dfrac{2}{3}x-7$ $\qquad \{R.\ s$ e $t\}$

80. $r: y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ $\qquad s: y=\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ $\qquad t: y=x\sqrt{2}+\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ $\qquad \{R.\ r$ e $s\}$

81. $r: y=\dfrac{x}{2}+1$ $\qquad s: y=\dfrac{x+1}{2}$ $\qquad t: y+2=\dfrac{1-x}{2}$ $\qquad \{R.\ r$ e $s\}$

82. r: $2x-5y+7=0$ $\qquad s$: $4x+10y+7=0$ $\qquad t$: $-6x+15y-7=0$ $\qquad \{R.\ r$ e $t\}$

83. r: $8x+4y=11$ $\qquad s$: $4x+2y-13=0$ $\qquad t$: $x=2y+15$ $\qquad \{R.\ r$ e $s\}$

84. $r: x\sqrt{2}-\dfrac{y}{\sqrt{3}}-2=0$ $\qquad s: 2x\sqrt{2}-y\sqrt{3}+5=0$ $\qquad t: 4x-y\sqrt{6}=0$ $\qquad \{R.\ s$ e $t\}$

85. $r: \left(1+\sqrt{3}\right)x-\left(5+\sqrt{3}\right)y+2+\sqrt{3}=0$

$s: \left(5+\sqrt{3}\right)x-22y-\sqrt{3}=0$

$t: 2x+2(1-2\sqrt{3})y+1=0$ $\qquad \{R.\ r$ e $s\}$

Per ciascuna delle seguenti terne di rette, individuare le due che sono tra di loro perpendicolari

86. r: $y=x+2$ $\qquad s$: $y=3-x$ $\qquad t$: $y=-1$ $\qquad \{R.\ r$ e $s\}$

87. $r: y=\dfrac{2}{3}x-1$ $\qquad s: y=4-\dfrac{3}{2}x$ $\qquad t: y=-\dfrac{2}{3}x+8$ $\qquad \{R.\ r$ e $s\}$

88. $r: y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ $\quad s: y=x\sqrt{2}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ $\quad t: y=-x\sqrt{2}$ $\quad \{R.\ r\ e\ t\}$

89. $r: y=\dfrac{5x}{2}+1$ $\quad s: y=\dfrac{-5x+1}{2}$ $\quad t: y=\dfrac{2x+1}{-5}$ $\quad \{R.\ r\ e\ t\}$

90. r: $2x-5y+7=0$ $\quad s$: $2x+5y+8=0$ $\quad t$: $5x-2y+9=0$ $\quad \{R.\ s\ e\ t\}$

91. r: $4x+3y=11$ $\quad s$: $-3x+4y=13$ $\quad t$: $-3x-4y=15$ $\quad \{R.\ r\ e\ s\}$

92. $r: \dfrac{x\sqrt{2}}{2}-\dfrac{5\sqrt{6}y}{6}+2=0$ $\quad s: x\sqrt{2}+\dfrac{y\sqrt{6}}{5}=0$ $\quad t: 3\sqrt{3}x-\dfrac{y\sqrt{6}}{2}+1=0$ $\quad \{R.\ r\ e\ s\}$

DISTANZE PUNTO-RETTA

Calcolare la distanza tra il punto P e la retta r in ciascuno dei seguenti casi

93. $P(2, 4)$ $\quad r$: $y=4x+5$ $\quad \{R.\ \dfrac{9}{\sqrt{17}}\}$

94. $P(7, 0)$ $\quad r$: $y=\dfrac{3}{4}x+2$ $\quad \{R.\ \dfrac{29}{5}\}$

95. $P\left(-\dfrac{3}{7};\dfrac{11}{7}\right)$ $\quad r$: $y=\dfrac{15}{8}x-1$ $\quad \{R.\ \dfrac{27}{17}\}$

96. $P(2, -3)$ $\quad r$: $y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ $\quad \{R.\ \dfrac{6\sqrt{34}-5\sqrt{17}}{17}\}$

97. $P(-2, 7)$ $\quad r$: $2x-5y+11=0$ $\quad \{R.\ \dfrac{28}{\sqrt{29}}\}$

98. $P(5, 16)$ $\quad r$: $20x-21y=0$ $\quad \{R.\ \dfrac{236}{29}\}$

99. $P\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{4}\right)$ $\quad r$: $40x-9y+22=0$ $\quad \{R.\ \dfrac{27}{17}\}$

100. $P(0, 5)$ $\quad r$: $(2+\sqrt{3})x+(3+2\sqrt{3})y+(1-\sqrt{3})=0$ $\quad \{R.\ \dfrac{5+2\sqrt{3}}{2}\}$

Altri problemi su parallelismo e perpendicolarità, distanza tra punti e distanza tra punto e retta

101. Per quali valori del parametro k la retta di equazione $kx+(2k-1)y+(3-7k)=0$ ha distanza dall'origine uguale a $2\sqrt{2}$? $\quad \{R.\ k=\dfrac{1}{9}$ e $k=1\}$

102. Per quali valori del parametro k la retta di equazione $(k-\sqrt{3})x+(2k+\sqrt{3})y+1=0$ ha distanza uguale a $\dfrac{13\sqrt{3}}{36}$ dal punto $\left(\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$? $\quad \{R.\ k=-\dfrac{113\sqrt{3}}{2071}$ e $k=\sqrt{3}\}$

103. Per quali valori del parametro k la retta di equazione $(6k+1)x+(5-3k)y+(2k+1)=0$ ha distanza uguale a 5 dal punto $\left(-\dfrac{13}{33};-\dfrac{4}{33}\right)$? $\quad \{R.$ *Il problema non ha soluzione*$\}$

104. Verificare che, comunque si scelga il parametro k, la retta di equazione $\dfrac{k^2-1}{k^2+1}x+\dfrac{2k}{k^2+1}y-2=0$ ha sempre la stessa distanza dall'origine. $\quad \{R.\ d=2\}$

105. Dopo aver verificato che il quadrilatero di vertici $A(-9; 5)$, $B(-6; 9)$, $C(6; 0)$ e $D(3; -4)$ è un rettangolo, calcolarne perimetro e l'area.

$\{R.$ *perimetro* $=40$, *area* $=75\}$

106. Dati i punti A $(-5\ ;\ 0)$, B $(0\ ;\ 10)$ e C $(7\ ;\ 9)$, calcolare le misure delle tre altezze AR, BS, CT del triangolo ABC. $\{R.\ \overline{AR} = \frac{15}{\sqrt{2}},\ \overline{BS} = 5,\ \overline{CT} = \frac{15}{\sqrt{5}}\ \}$

107. Dopo aver verificato che il quadrilatero di vertici O $(0\ ;\ 0)$, A $(16\ ;\ 4)$, B $(14\ ;\ -1)$ e C $(-2\ ;\ -5)$ è un parallelogramma, calcolarne le misure delle due altezze, il perimetro e l'area.

$\{R.$ *alt. rel. ai lati OA e CB* $= \frac{18}{\sqrt{17}}$, *alt. rel. ai lati OC e AB* $= \frac{72}{\sqrt{29}}$; *perimetro* $= 8\sqrt{17} + 2\sqrt{29}$, *area* $= 72\}$

108. Dopo aver verificato che il quadrilatero di vertici A $(-3\ ;\ 1)$, B $(3\ ;\ 9)$, C $(12\ ;\ 6)$ e D $(12\ ,\ -4)$ è un trapezio isoscele, calcolarne la misura dell'altezza, il perimetro e l'area.

$\{R.$ *altezza* $= 3\sqrt{10}$, *perimetro* $= 20 + 8\sqrt{10}$, *area* $= 120\}$

FASCI DI RETTE

Per ciascuno dei seguenti fasci di rette, stabilire se è proprio o improprio, e nel primo caso determinare le coordinate del centro

109. $2x + ky + (k - 2) = 0$ $\{R.$ *proprio, di centro* $(1\ ;\ -1)\}$

110. $(7k - 2)x + (3 - k)y + 1 = 0$ $\{R.$ *proprio, di centro* $\left(-\frac{1}{19}\ ;\ -\frac{7}{19}\right)\}$

111. $2x - 5y + (2k - 7) = 0$ $\{R.$ *improprio*$\}$

112. $\left(3k - \sqrt{3}\right)x + \left(3k + \sqrt{3}\right)y + \left(5k - 2\sqrt{3}\right) = 0$ $\{R.$ *proprio, di centro* $\left(-\frac{11}{6}\ ;\ \frac{1}{6}\right)\}$

113. $(3 - k)x + (3k - 9)y + (k + 8) = 0$ $\{R.$ *improprio*$\}$

114. $\left(2k - \sqrt{5}\right)x + \left(5 - 2k\sqrt{5}\right)y + k = 0$ $\{R.$ *improprio*$\}$

CONICHE

In ciascuno dei seguenti casi, stabilire se la conica è un'iperbole, una parabola, un'ellisse o una circonferenza

115. $2x^2 + xy - 3y^2 + 2x - 5 = 0$ $\{R.$ *iperbole*$\}$

116. $3x^2 + 2xy + 4y^2 + x - y = 0$ $\{R.$ *ellisse*$\}$

117. $4x^2 + 4xy + y^2 + x - 5y + 6 = 0$ $\{R.$ *parabola*$\}$

118. $2x^2 - 8y^2 + 5x - y + 3 = 0$ $\{R.$ *iperbole*$\}$

119. $xy - y^2 + 6x - 7y + 11 = 0$ $\{R.$ *iperbole*$\}$

120. $2x^2 + 2y^2 + 5x + y - 10 = 0$ $\{R.$ *circonferenza*$\}$

121. $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 5x + y - 10 = 0$ $\{R.$ *ellisse*$\}$

122. $2x^2 + 5x - 12y + 3 = 0$ $\{R.$ *parabola*$\}$

123. $xy - 13x - 22y + 43 = 0$ $\{R.$ *iperbole*$\}$

In ciascuno dei seguenti casi, stabilire la posizione della retta r rispetto alla conica $\mathscr{C}$

124. r: $2x + 3y - 4 = 0$; $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 13 = 0$ $\{R.$ *tangente*$\}$

125. r: $x + y = 0$; $\mathscr{C}$: $x^2 + xy + 2y^2 - 10 = 0$ $\{R.$ *secante*$\}$

126. r: $2x + y = 0$; $\mathscr{C}$: $x^2 + xy - y^2 + 5x + 3y + 1 = 0$ $\{R.$ *secante*$\}$

127. r: $3x - 7y + 38 = 0$; $\mathscr{C}$: $9x^2 - 12xy + 4y^2 + x - 5 = 0$ $\{R.$ *esterna*$\}$

128. r: $2x - y - 2 = 0$; $\mathscr{C}$: $xy - 5x + 8y + 11 = 0$ $\{R.$ *secante*$\}$

129. r: $5x + y = 2$; $\mathscr{C}$: $25x^2 + 10xy + y^2 - 8x + 3y = 0$ $\{R.$ *secante*$\}$

In ciascuno dei seguenti casi, determinare gli eventuali valori del parametro k per i quali la retta r è tangente alla conica $\mathscr{C}$

130. r: $(k-1)x + y - (2k+1) = 0$; $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ {*R.* $k = -\dfrac{1}{3}$}

131. r: $y = k(x-3)$; $\mathscr{C}$: $x^2 + 4y^2 = 4$ {*R.* $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$}

131. r: $y = kx + 5k + 4$; $\mathscr{C}$: $x^2 + 2xy + y^2 + 5x - 3y + 1 = 0$ {*R. nessuna soluzione*}

132. r: $y = kx - 5k + 2$; $\mathscr{C}$: $5x^2 - 4xy + y^2 - 34x + 14y + 53 = 0$ {*R.* $k = 4$}

PROBLEMI SULLA CIRCONFERENZA

Scrivere le equazioni delle circonferenze di cui sono assegnati centro e raggio:

133. $C\,(-2\,;\,3)$ $r = 8$ {*R.* $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 51 = 0$}

134. $C\left(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{5}{2}\right)$ $r = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ {*R.* $x^2 + y^2 - x + 5y + 4 = 0$}

135. $C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $r = 1$ {*R.* $x^2 + y^2 - x\sqrt{2} - y\sqrt{2} = 0$}

136. $C\left(-\dfrac{3}{4}\,;\dfrac{9}{8}\right)$ $r = \dfrac{13}{8}$ {*R.* $16x^2 + 16y^2 + 24x - 36y - 13 = 0$}

Determinare le coordinate del centro e la lunghezza del raggio delle seguenti circonferenze

137. $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$ {*R.* $C\,(2\,;\,-5)$; $r = 6$}

138. $9x^2 + 9y^2 - 12x - 30y - 167 = 0$ {*R.* $C\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{5}{3}\right)$; $r = \dfrac{14}{3}$}

139. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$ {*R. la circonferenza si riduce al solo punto* $C\,(3\,;\,-1)$}

140. $x^2 + y^2 - 4x\sqrt{3} + 6y\sqrt{3} + 11 + 10\sqrt{3} = 0$ {*R.* $C\,(2\sqrt{3}\,;-3\sqrt{3})$; $r = 5 - \sqrt{3}$}

141. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 20y + 32 = 0$ {*R. la circonferenza non ha alcun punto reale*}

Determinare la reciproca posizione delle seguenti coppie di circonferenze
NOTA: se in un problema non è richiesto di determinare le coordinate degli eventuali punti di intersezione, si può fare a meno di risolvere esplicitamente il sistema: è sufficiente ricordare le condizioni sotto le quali si hanno le diverse reciproche posizioni (confronto tra la distanza tra i centri e la somma o la differenza dei raggi)

142. $\mathscr{C}_1$: $x^2 + y^2 + 4x + 10y - 7 = 0$ $\mathscr{C}_2$: $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ {*R. secanti*}
143. $\mathscr{C}_1$: $x^2 + y^2 + 4x + 10y - 7 = 0$ $\mathscr{C}_2$: $x^2 + y^2 - 16x - 18y + 141 = 0$ {*R. esterne*}
144. $\mathscr{C}_1$: $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ $\mathscr{C}_2$: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ {*R. interne*}
145. $\mathscr{C}_1$: $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 10 = 0$ $\mathscr{C}_2$: $4x^2 + 4y^2 - 10x - 14y + 287 = 0$ {*R. concentriche*}
146. $\mathscr{C}_1$: $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ $\mathscr{C}_2$: $x^2 + y^2 + 4x + 12y = 0$ {*R. tangenti estern.*}
147. $\mathscr{C}_1$: $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 15 = 0$ $\mathscr{C}_2$: $4x^2 + 4y^2 - 56x - 8y - 225 = 0$ {*R. tangenti intern.*}
148. $\mathscr{C}_1$: $4x^2 + 4y^2 + 20x - 28y - 215 = 0$ $\mathscr{C}_2$: $x^2 + y^2 - 7x = 0$ {*R. secanti*}

In ciascuno dei seguenti casi, determinare gli eventuali valori del parametro k per i quali la retta r è tangente alla circonferenza $\mathscr{C}$

149. r: $(k + 1)x + 2y - (2k + 3) = 0$; $\mathscr{C}$: $4x^2 + 4y^2 = 1$ {*R.* $k = -\dfrac{31}{15}$ *e* $k = -1$}

150. r: $(2k + 1)x + (1 - 5k)y + k = 0$; $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 - 13x - 22y + 93 = 0$ {*R.* $k = -3$ *e* $k = \dfrac{221}{1425}$}

151. r: $(2k + 3)x + ky + 5 - 3k = 0$; $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 18 = 0$ {*R. nessuna soluzione*}

152. r: $(k + 8)x + (2k + 7)y + (2k - 11) = 0$; $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 11 = 0$ {*R.* $k = -\dfrac{103}{20}$}

In ciascuno dei seguenti casi, determinare la circonferenza che soddisfa le condizioni indicate (in alcuni casi possono esistere più soluzioni). ATTENZIONE! In diversi casi, non conviene risolvere il problema con soli procedimenti algebrici, ma ragionando per intersezione di opportuni luoghi geometrici.

153. Passa per i punti A (−6 ; 5), B (0 ; 7) e C (6 ; 1) {*R.* $x^2 + y^2 + 2x - 49 = 0$}
154. Passa per i punti A (−4 ; 1), B (−2 ; 4) e C (2 ; 10) {*R. nessuna soluzione*}
155. Ha il centro in C (−2 ; 1) e passa per il punto A (10 ; 6) {*R.* $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 164 = 0$}
156. Passa per i punti A (−1 ; 0) e B (1 ; 4), ed ha il centro sulla retta $y = 3x - 12$
{*R.* $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$}
157. Ha il centro in C (3 ; −1) ed è tangente alla retta $y = x + 6$ {*R.* $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 40 = 0$}
158. Passa l'origine ed è tangente nell'origine alla retta $2x + 3y - 2= 0$ {*R.* $x^2 + y^2 + 12x + 8y = 0$}
159. Passa per i punti A (2 ; 6) e B (5 ; −3) ed è tangente alla retta $x + 3 = 0$
{*R.* $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ *e* $x^2 + y^2 - 244x - 82y + 940 = 0$}
160. Passa per i punti A (−4 ; 5) e B (7 ; 5) ed è tangente alla retta $5x - 3y + 14 = 0$
{*R. nessuna soluzione* }
161. È tangente alle rette $x - 8y + 65 = 0$ e $7x - 4y - 65 = 0$, ed ha raggio $r = \sqrt{65}$
{*R.* $x^2 + y^2 = 65$, $4x^2 + 4y^2 - 160x - 20y + 1365 = 0$,
$x^2 + y^2 - 60x - 40y + 1235 = 0$ *e* $4x^2 + 4y^2 - 80x - 140y + 1365 = 0$}
162. È tangente alle rette $9x + 7y = 63$, $11x + 3y = 37$, $7x - 9y = 49$
{*R.* $x^2 + y^2 + 18x - 4y + 210 = 0$, $9x^2 + 9y^2 - 150x - 192y + 1129 = 0$,
$45x^2 + 45y^2 - 438x - 24y + 965 = 0$ *e* $5x^2 + 5y^2 - 66x + 32y + 243 = 0$}

PROBLEMI SULLA PARABOLA

Per ciascuna delle seguenti parabole ad asse orizzontale o verticale, determinare l'equazione dell'asse e le coordinate del vertice.

163. $y = 2x^2 + 8x - 1$ {*R. asse* $x = -2$, V (−2 ; −9)}

164. $y = \dfrac{9}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$ {*R. asse* $x = 0$, $V\left(0\,;-\dfrac{1}{2}\right)$}

165. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ {*R. asse* $x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $V\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,;-\dfrac{7\sqrt{3}}{6}\right)$}

166. $x = 3y^2 - 12y$ {*R. asse* $y = 2$, V (−12 ; 2)}

167. $x = -\dfrac{3}{8}y^2 + \dfrac{7}{2}y + \dfrac{5}{4}$ {*R. asse* $y = \dfrac{14}{3}$, $V\left(\dfrac{113}{12}\,;\dfrac{14}{3}\right)$}

In ciascuno dei seguenti casi, determinare la parabola ad asse verticale che soddisfa le condizioni indicate (in alcuni casi possono esistere più soluzioni).

168. Passa per i punti A $(-4\,;\,23)$, B $(-1\,;\,-10)$ e C $(3\,;\,2)$ $\{R.\ y = 2x^2 - x - 13\}$

169. Passa per i punti A $(-2\,;\,5)$, B $(1\,;\,1)$ e C $(6\,;\,5)$ $\{R.\ \ y = \dfrac{4x^2 - 16x + 27}{15}\}$

170. Ha vertice V $(1\,;\,-2)$ e passa per il punto A $(4, 6)$ $\{R.\ \ y = \dfrac{7x^2 - 14x - 43}{25}\}$

171. Ha asse $x = -8$ e passa per i punti $(-6, -13)$ e $(1\,;\,25)$ $\{R.\ \ y = \dfrac{38x^2 + 608x + 1279}{77}\}$

172. Ha asse $x = 3$ e passa per i punti $(-2\,;\,7)$ e $(8\,;\,7)$
{*R. problema indeterminato: sono accettabili tutte le parabole di equazione* $y = ax^2 - 6ax + (7 - 16a)$, *con a reale non nullo*}

173. Ha asse $x = \dfrac{1}{2}$ e passa per i punti $(-3\,,\,0)$ e $(4\,;\,1)$
{*R. nessuna soluzione*}

174. Passa per il punto $(3\,;\,3)$ ed è tangente nell'origine alla retta $y = 4x$ $\{R.\ y = -x^2 + 4x\}$

175. Passa per i punti A $(-5\,;\,8)$ e B $(1\,;\,2)$, ed è tangente all'asse delle x
$\{R.\ \ y = \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}\ \ e\ \ y = \dfrac{x^2}{18} - \dfrac{7}{9}x + \dfrac{49}{18}\}$

In ciascuno dei seguenti casi, determinare la parabola ad asse orizzontale che soddisfa le condizioni indicate (in alcuni casi possono esistere più soluzioni).

176. Passa per i punti $(-8\,;\,5)$, B $(1\,;\,2)$ e C $(1\,;\,-4)$ $\{R.\ \ x = \dfrac{-y^2 - 2y + 11}{3}\}$

177. Ha asse $y = 1$ e passa per i punti $(0, 5)$ e $(1\,;\,-6)$ $\{R.\ \ x = \dfrac{y^2 - 2y - 15}{33}\}$

178. Passa per i punti $(2\,;\,0)$ e $\left(\dfrac{7}{2}\,;\,3\right)$, ed è tangente alla bisettrice del primo e del terzo quadrante
$\{R.\ \ x = \dfrac{y^2 + 6y + 36}{18}\ \ e\ \ x = \dfrac{y^2 - 2y + 4}{2}\}$

PROBLEMI SU ELLISSE E IPERBOLE

Determinare fuochi e vertici delle seguenti ellissi riferite ai propri assi

179. $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{49} = 1$ {*R. fuochi* $\left(\pm 4\sqrt{2}\,;\,0\right)$, *vertici* $(\pm 9\,;\,0)$ *e* $(0\,;\,\pm 7)$}

180. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{26} = 1$ { *R. fuochi* $(0\,;\,\pm 1)$, *vertici* $(\pm 5\,;\,0)$ *e* $\left(0\,;\,\pm\sqrt{26}\right)$}

181. $82x^2 + 49y^2 = 1$ { *R. fuochi* $\left(0\,;\,\pm\sqrt{\dfrac{33}{4018}}\right)$, *vertici* $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{82}}\,;\,0\right)$ *e* $\left(0\,;\,\pm\dfrac{1}{7}\right)$}

182. $2x^2 + 5y^2 = 100$ { *R. fuochi* $\left(\pm 10\sqrt{21}\,;\,0\right)$, *vertici* $\left(\pm 5\sqrt{2}\,;\,0\right)$ *e* $\left(0\,;\,\pm 2\sqrt{5}\right)$}

183. $34x^2 + 35y^2 = 36$ { *R. fuochi* $\left(\pm 3\sqrt{\dfrac{2}{595}}\,;\,0\right)$, *vertici* $\left(\pm 3\sqrt{\dfrac{2}{17}}\,;\,0\right)$ *e* $\left(0\,;\,\pm\dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)$}

In ciascuno dei seguenti casi, determinare l'ellisse riferita ai propri assi che soddisfa le condizioni indicate

184. Passa per i punti (9 ; 1) e (2 ; 5) {*R.* $24x^2 + 77y^2 = 2021$}
185. Passa per i punti (3 ; 5) e (2 ; 6) {*R.* $11x^2 + 5y^2 = 224$}
185. Passa per (2 ; 3) ed ha un vertice in (0 ; 7) {*R.* $5x^2 + y^2 = 49$}
186. Ha un fuoco in (–4 ; 0) e un vertice in $\left(0\,;\frac{11}{2}\right)$ {*R.* $484x^2 + 740y^2 = 22385$}
187. Ha un fuoco in $\left(0\,;-\sqrt{13}\right)$ e passa per $\left(2\,;\frac{5}{3}\sqrt{6}\right)$ {*R.* $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{25}=1$ }

Determinare fuochi, vertici ed equazioni degli asintoti delle seguenti iperboli riferite ai propri assi

188. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{4}=1$ {*R. fuochi* $\left(\pm 2\sqrt{26}\,;0\right)$, *vertici* (±10 ; 0), *asintoti* $y=\pm\frac{2}{5}x$ }
189. $x^2 - 12y^2 = 100$ {*R. fuochi* $\left(\pm 5\sqrt{\frac{13}{3}}\,;0\right)$, *vertici* (±10 ; 0) , *asintoti* $y=\pm\frac{x}{2\sqrt{3}}$ }
190. $13y^2 - 7x^2 = 91$ {*R. fuochi* $\left(0\,;\pm 2\sqrt{5}\right)$, *vertici* $\left(0\,;\pm\sqrt{7}\right)$, *asintoti* $y=\pm\sqrt{\frac{7}{13}}x$ }
191. $\frac{64x^2}{289}-\frac{64y^2}{361}=-1$ {*R. fuochi* $\left(0\,;\pm\frac{5}{8}\sqrt{26}\right)$, *vertici* $\left(0\,;\pm\frac{19}{8}\right)$, *asintoti* $y=\pm\frac{19}{17}x$ }

In ciascuno dei seguenti casi, determinare l'iperbole riferita ai propri assi che soddisfa le condizioni indicate

192. Passa per i punti (2 ; 3) e (–3 ; 5) {*R.* $16x^2 - 5y^2 = 19$}
193. Passa per i punti (–2 ; 5) e (22 ; 11) {*R.* $x^2 - 5y^2 = -121$}
194. Ha un fuoco in (3 ; 0) e un vertice in (–1 ; 0) {*R.* $x^2-\frac{y^2}{8}=1$ }
195. Ha un asintoto di equazione $y = x\sqrt{2}$ e passa per (1 ; –2) {*R.* $x^2-\frac{y^2}{2}=-1$ }

In ciascuno dei seguenti casi, determinare l'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti che soddisfa la condizione indicata

196. Passa per il punto $\left(\frac{7}{4}\,;\frac{8}{21}\right)$ {*R.* $xy=\frac{2}{3}$ }
197. Passa per il punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;6\sqrt{2}\right)$ {*R.* $xy=-6$ }
198. Ha un vertice nel primo quadrante a distanza $\sqrt{26}$ dall'origine {*R.* $xy = 13$}
199. È tangente alla retta $2x - y - 3 = 0$ {*R.* $xy=-\frac{9}{8}$ }
200. È tangente all'asse delle ordinate {*R. nessuna soluzione*}